CORRIGÉ MAT 103

EXAME Janvier 2018

Exercice 1 $f(x)$ défini ssi $\underbrace{2x^2-5x-3}_{p(x)} > 0$ ~~⇔ 2(x~~

1) $\Delta = 25+24 = 49$

$x = \dfrac{5 \pm 7}{4} = 3$ ou $-\dfrac{1}{2}$ Comme $2>0$, $p(x)>0 \Leftrightarrow$

$x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]3; +\infty\right[$

$D_g = \mathbb{R}$.

$f'(x) = 5 \cdot \dfrac{4x-5}{2x^2-5x-3}$ et $g'(x) = 5(3x^2+6)e^{x^3+6x-1}$

2) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 6xy - 5y - \dfrac{y}{x^2}$ $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 - 5x + \dfrac{1}{x}$.

Exercice 2 1) $f(x) = \dfrac{x}{(1+x)^2}$ sur $\mathbb{R}_+$

$f'(x) = \dfrac{(1+x)^2 - 2x(1+x)}{(1+x)^4} = \dfrac{1}{(1+x)^3}(1-x)$

	0		1		∞
f'		+	0	−	
f		↗	1/4	↘	

f a un max en 1 qui vaut $1/4$.

2) $m=1$ donne l'éclairage max.

Janvier 2018

2

Exercice 3 $F(x) = \frac{5x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + 6x - \frac{5}{2}\ln|x| - \frac{1}{\cancel{3}}\frac{1}{x^2}$

1)

$G(x) = 2\ln|x^3+1|$ $H(x) = \frac{5}{2}e^{x^2+1}$

2) $\int_0^1 4t^3+2t-1\,dt = \left[t^4+t^2-t\right]_0^1 = 1$

$\int_0^1 \frac{-2}{1+2t}\,dt = -\frac{2}{2}\left[\ln|1+2t|\right]_0^1 = -\ln 2$

Exercice 4 1)a) $\det A = \cancel{1} \neq 0$ donc A inversible

1)b) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$

1)c) $A^2 - 3A = \begin{pmatrix} 4-3 & -9+9 \\ -3+3 & 7-6 \end{pmatrix} = I_2.$

$A(A-3I_2) = I_2$ donc ~~A est inver~~ $A^{-1} = A - 3I_2$

$= \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$

$\left(A^{-1} = \frac{1}{-\cancel{1}}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right.$ par la formule générale $\left.\right)$

2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -17 & 12 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$

Donc A inversible d'inverse B.

Janvier 2018
3

<u>Exercice 5</u> $u_0 = 2$ $u_{n+1} = 3u_n - 2$.

1) $u_1 = 4$ $u_2 = 10$ Donc $u_1 - u_0 = 1$ mais $u_2 - u_1 = 6 \neq 1$
donc $(u_n)_n$ n'est pas arith.

$\frac{u_1}{u_0} = \frac{4}{2}$ $\frac{u_2}{u_1} = \frac{10}{4} \neq \frac{4}{2}$ donc $(u_n)_n$ n'est pas géom.

2) $v_{n+1} = 3u_n - 2 - 1 = 3(u_n - 1) = 3 v_n$.
Donc $(v_n)_n$ est géom. de raison 3.
D'où $v_n = v_0 3^n = 1 \cdot 3^n$ soit $u_n = 1 \cdot 3^n + 1$.